جامعة البعث

معادلات تفاضلية /2/ اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات الدورة الصيفية للعام الدراسي 2015-2016

السؤال الأول : (25درجة)

أوجد الحل العام للمعادل التفاضلية $(1+x^2)y''+xy'-y=1$

إذا علمت أنّ $y_2 = x - 1$, $y_1=-1$ هما حلان خاصان لها .

السؤال الثاني : (20درجة)

اعتمادا" عل علاقة ليوفيل – أوستر غرادسكي أوجد الحل العام للمعادلةالتفاضلية

$2xy''+y'-2y=0$

إذا علمت أنّ الدالة $y_1=e^{2\sqrt{x}}$ حل خاص لها .

السؤال الثالث: (6+8+12+4=30درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $y''+y=2\sin x\,\sin 2x$

والمطلوب : 1" – أوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة .

2" – اقترح حلا" خاصا" لهذه المعادلة وفق طريقة المعاملات غير المعينة دون تعيين هذه المعاملات .

3"- أوجد حلا" خاصا"لها باستخدام المؤثر التفاضلي العكسي .

4"- أكتب عبارة الحل العام لهذه المعادلة .

السؤال الرابع : (25درجة)

أوجد الحل العام للمعادلة $x^2y''-2xy'+2y=2x^3-x$

بعد تحويلها إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة .

مدرس المقرر

د.رامز الشيخ فتوح

الإجابات النموذجية لمادة المعادلات التفاضلية /2/ الدورة الصيفية 2016-2015مع سلم الدرجات

جواب السؤال الأول : (28درجة)

المعادلة المعطاة تكتب بالشكل $y''+\frac{1}{2x}y'-\frac{1}{x}y=0$ والحل العام يعطى ب

$$y_h=y_1\left[\int\frac{c_1e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx+c_2\right]=e^{2\sqrt{x}}\left[\int\frac{c_1e^{-\int\frac{dx}{2x}}}{e^{4\sqrt{x}}}dx+c_2\right]$$

(5) (5)

$$y_h=e^{2\sqrt{x}}\left[\int\frac{c_1dx}{\sqrt{x}e^{4\sqrt{x}}}+c_2\right]=e^{2\sqrt{x}}\left[c_0e^{-4\sqrt{x}}+c_2\right]=c_0e^{-2\sqrt{x}}+c_2e^{2\sqrt{x}}$$

(8) (8) (2)

جواب السؤال الثاني : (10+10+15+4=39درجة)

المعادلة المعطاة تكتب بالشكل $y''+y=\cos x-\cos 3x$

"1- المعادلة المميزة للمعادلة المتجانسة المناظرة هي 10

$$m^2+1=0 \Rightarrow m_1=i \quad , \quad m_2=-i$$

(2) (2) (2)

وبالتالي فإنّ الحل العام للمعادلة المتجانسة يكون $y_h=A\cos x+B\sin x$ (4)

حيث A ,B ثوابت اختيارية.

"2- الحل الخاص المقترح لهذه المعادلة وفق القاعدة الأساسية هو 15

(4) $y_p=b_1\cos x+b_2\sin x+b_3\cos 3x+b_4\sin 3x$

نلاحظ أنّ هناك اشتراك بين y_p , y_h نزيل هذا الإشتراك بإن نضرب الجزء المشترك من y_p باقل قوة ل x تزيل هذا الإشتراك فيصبح الحل الخاص (2)

المقترح من الشكل $y_p=b_1x\cos x+b_2x\sin x+b_3\cos 3x+b_4\sin 3x$ (4)

وحيث b_1 , b_2 , b_3 , b_4 هي المعاملات التي يراد تعينها .

3"- المعادلة المعطاة تكتب باستخدام المؤثر التفاضلي بالشكل

(15)

(2) $$(D^2+1)y = \cos x - \cos 3x$$

ومنه فإنّ

(3) $$y_p = \frac{1}{D^2+1}(\cos x - \cos 3x)$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+1}\cos x - \frac{1}{D^2+1}\cos 3x = \frac{x \sin x}{2} + \frac{1}{8}\cos 3x$$

(5) (5)

4"- الحل العام هو

(4)

(2) $$y = y_h + y_p$$

أي أنّ

(2) $$y = A\cos x + B\sin x + \frac{x \sin x}{2} + \frac{1}{8}\cos 3x$$

جواب السؤال الثالث: (33درجة)

المعادلة المعطاة هي معادلة أولر نفرض أنّ

(=1+1+2+2) $$x = e^t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow xy' = D_t y \Rightarrow x^2 y'' = D_t(D_t - 1)y$$

نعوض في المعادلة المعطاة فنجد أنّ

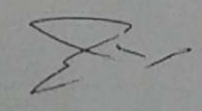
(4) $$(D_t^2 - 3D_t + 2)y = 2e^{3t} - e^t$$

والحل العام لهذه المعادلة هو

(2) $$y = y_h + y_p$$

المعادلة المميزة للمعادلة المتجانسة المناظرة هي

(?=2+2+2) $$m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow m_1 = 2 \;,\; m_2 = 1$$



أيّ أنّ

(2) $$y_h = Ae^{2t} + Be^t$$

(3) $$y_p = \frac{1}{(D_t - 2)(D_t - 1)}(2e^{3t} - e^t)$$

(4) $$y_p = e^{3t} + te^t$$

ومنه فإنّ

(3) $$y = Ae^{2t} + Be^t + e^{3t} + te^t$$

أيّ أنّ الحل العام للمعادلة المعطاة هو

(3) $$y = Ax^2 + Bx + x^3 + x\ln x$$

****

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

